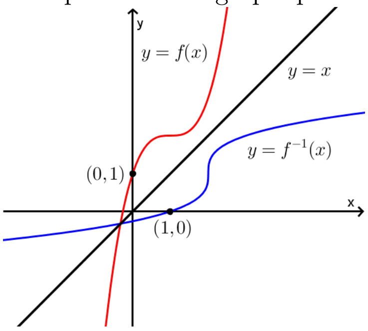
Fonction logarithme népérien

On appelle **fonction réciproque** d'une fonction f la fonction qui, quand elle existe, est "la marche arrière" de la fonction f. On note alors f^{-1} cette fonction réciproque.
Il faudra être vigilant à bien déterminer son ensemble de définition.
La représentation graphique de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la première diagonale.

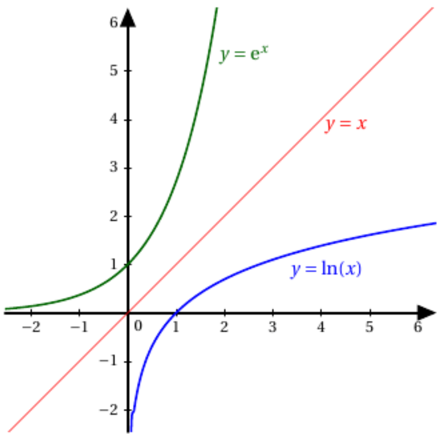


Exercice 2.1 Donner quand c'est possible la fonction réciproque de la fonction f, et le domaine de définition de f^{-1}

1. $f(x) = x^2$; $f^{-1} =$ .... définie sur ....
2. $f(x) = 3x + 4$; $f^{-1} =$ .... définie sur ....
3. $f(x) = \frac{1}{x}$; $f^{-1} =$ .... définie sur ....
   ....
4. $f(x) = 5x^2 - 1$; $f^{-1} =$ .... définie sur ....
5. $f(x) = x^3$; $f^{-1} =$ .... définie sur ....
6. $f(x) = \cos(x)$; $f^{-1} =$ .... définie sur ....

1. Réciproque de la fonction exponentielle, premières propriétés

Définition 2.1 On démontre (et nous admettrons) que la **fonction exponentielle** admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}_+^*$ appelée **logarithme népérien** et notée $\ln$.
Ainsi, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(a) = b \Leftrightarrow a = e^b$,
et leurs représentations graphiques sont symétriques par rapport à la première diagonale.



Ces propriétés de symétrie permettent de déduire certaines propriétés de la fonction logarithme népérien :

Propriété 2.1 • La fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
La fonction $\ln$ admet une asymptote $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
La fonction $\ln$ admet une asymptote $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $a < b \Rightarrow$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- La fonction $\ln$ est une **bijection** ("correspondance un à un") de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$, donc $a = b \Rightarrow$ ....

Exercice 2.2 Dire si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses :

1. $\ln(e) = 0$: ....
Justification :..
2. L'équation $\ln(x) = -1$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]0; +\infty[$: ....
Justification :..
3. $\ln(x) = -3 \Leftrightarrow x = -e^3$: ....
Justification :..
4. $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln(5)$: ....
Justification :..

2. Propriétés algébriques

Le fait que ln soit la fonction réciproque de exp permet, grâce aux propriétés des puissances qui s'appliquent à la fonction exp, d'établir les propriétés suivantes :

Propriété 2.2 $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{Q}$,
- $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n \times \ln(x)$

La dernière de ces propriétés permet "d'accéder à l'exposant" dans une équation ou une inéquation.

Exercice 2.3 Déterminer le plus petit entier n tel que $1,2^n > 10$:

....
....
....
....
....

Exercice 2.4 Vérifier sans calculatrice les égalités suivantes :

1. $\ln(3) + \ln(9) + 3\ln\left(\frac{1}{3}\right) = 0$
....
....
....
....
2. $2\ln(4) + 3\ln(2) + 6\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$
....
....
....
....
3. $3\ln(e) + \ln(e^4) + 5\ln\left(\frac{1}{e}\right) = 2$
....
....
....
....

Exercice 2.5 Écrire sous la forme d'un seul logarithme les nombres suivants :

1. $2\ln 5 + 3\ln 2 - \ln 16$
....
....
....
....
2. $-3\ln 3 + \ln 9 + 1$
....
....
....
....
3. $4\ln 3 + 2ln5 + 4\ln 1$
....
....
....
....
4. $2\ln 4 - 3\ln 3$
....
....
....
....

Exercice 2.6 Résoudre les équations suivantes :

1. $3\ln x = 1$ dans $\mathbb{R}_+^*$
....
....
....
....
2. $\ln x(\ln x - 4) = 0$ dans $\mathbb{R}_+^*$
....
....
....
....
3. $5e^{-x} - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$
....
....
....
....
4. $(e^x + 3)(e^x - 7) = 0$ dans $\mathbb{R}$
....
....
....
....
....
....
....
5. $\ln(x^2) + 4\ln(x) - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}_+^*$
....
....
....
....
....
....
....

6. $\ln(x-1)+\ln(x-3)=0$ dans $]3;+\infty[$

....
....
....
....
....
....
....

Exercice 2.7

1. Soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5+3\times 2^n$. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 1000$

....
....
....
....
....
....

2. Soit v la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 5+3\times 0,5^n$. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n tel que $v_n \leqslant 5,01$

....
....
....
....
....
....

3. Soit w la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 5-3\times 0,5^n$. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n tel que $w_n \geqslant 4,999$

....
....
....
....
....
....

3. Étude de la fonction logarithme

Propriété 2.3 La fonction logarithme est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sur cet intervalle on a $\ln'(x)=\frac{1}{x}$
Pour une fonction composée, il vient : $\ln'(u)=\frac{u'}{u}$
La fonction logarithme est strictement croissante et concave ($\ln''(x)<0$) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2.8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=x+1+\ln(x)$. On note f' sa fonction dérivée, f'' sa dérivée seconde, et C sa courbe représentative.

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement si possible.

....
....
....
....
....
....

2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$

....
....
....

....
....
....

3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0,2;0,5]$, et en donner une valeur approchée au millième.
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

(b) En déduire le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$
....
....
....
....
....
....

4. (a) Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

(b) Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$
....
....
....
....
....
....

(c) En déduire la position de la courbe C par rapport à T.
....
....
....
....
....
....

Exercice 2.9 Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéoprojecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques.
On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est, en euro :

$$f(x) = \frac{x + 2 - \ln x}{x}$$

1. (a) Montrer que, pour tout réel $x \in [1;25]$:

$$f'(x) = \frac{\ln x - 3}{x^2}$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

   (b) En déduire le tableau de variation de f sur $[1;25]$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

   (c) Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal. Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.

....
....
....
....
....

2. Justifier qu'il est possible que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à $1,50$ €.

....
....
....
....
....
....

3. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ?. Justifier.

....
....
....
....
....
....

Exercice 2.10 Le musée du quai Branly à Paris a accueilli 1,26 million de visiteurs en 2018, soit une hausse de 7% par rapport à 2017. On suppose que cette évolution se maintient et on s'intéresse au nombre d'entrées en $2018 + n$, où n est un entier naturel.

1. Déterminer le nombre d'entrées en 2019 et en 2020.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. (a) Déterminer la plus petite valeur de l'entier n telle que $1,26 \times 1,07^n > 2$.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) Que signifie ce résultat pour le musée ?
   ....
   ....
   ....
   ....
3. Dans le même temps, en 2018, le musée du Louvre a battu son record de fréquentation en accueillant 10,2 millions de visiteurs. Déterminer en quelle année le musée du quai Branly devrait accueillir pour la première fois plus de 10 millions de visiteurs ? Que penser du résultat obtenu ?
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....